جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2017 - 2018
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (20 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) ان العملية الثنائية * المعرفة على Q بـ $a*b = \frac{a+b}{3}$ تجميعية حيث Q مجموعة الاعداد العادية.

(2) إن المجموعة $\{1, 2, 3\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بالمقاس 4 .

(3) اذا كانت G تبديلية فإن مركزها $Z(G)$ هو حيادي الزمرة G .

(4) ان العنصر a^7 مولد للزمرة الدوارة $G = \langle a \rangle$ والتي مرتبتها 91 .

(5) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصرا مرتبته 14 فإن مرتبة العنصر a^6 فيG تساوي 84.

(6) ان عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(7)$ يساوي 2 زمرة جزئية.

(7) ان عدد عناصر زمرة الخارج $U(20)/U_5(20)$ يساوي 5 .

(8) إن $4Z/8Z$ هي زمرة جزئية من زمرة الخارج $Z/8Z$.

(9) رتبة العنصر $(4, 1)$ من الزمرة $Z_{15} \oplus Z_{20}$ يساوي 75 .

(10) لتكن الزمرة الجزئية $H = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ من الزمرة $(Z_{10}, +)$ ، عندئذ زمرة الجداء المباشر $U(10) \oplus H$ تكون دوارة.

(11) عدد التشاكلات الزمرية الممكن تعريفها من الزمرة Z_{40} إلى الزمرة Z_{10} يساوي 5.

(12) ان $U(5) \cong Z_2 \oplus Z_2$.

(13) ان الزمرة $(U(17), .)$ هي p- زمرة حيث p عدد اولي.

السؤال الثاني (46 درجة): لتكن $(G, .)$ زمرة و $Z(G)$ مركز الزمرة G. اثبت صحة ما يلي:

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج ثم أثبت صحتها .

(2) إذا كان $a, b \in G$ ، فإن $o(a.b) = o(b.a)$ (حيث $o(a.b)$ يعني رتبة $(a.b)$ في G).

(3) اذا كانت الزمرة $G/Z(G)$ دوارة فإن الزمرة G تكون تبديلية.

(4) إذا كانت A, B زمرتين جزئيتين من G ، بحيث أن A.B زمرة جزئية في G، فإن $A.B = \langle A \cup B \rangle$.

(5) إذا كان $f: G \to G'$ تشاكلاً زمرياً فإن $\ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G .

(6) إذا كان f تطبيقاً من الزمرة $(Q^*, .)$ في نفسها حيث Q^* مجموعة الاعداد العادية المغايرة للصفر و(.) عملية الضرب العادي والمعرف بـ $f(x) = |x|$. اثبت أن f تشاكل ثم أوجد $\ker f$ و $f(Q^*)$.

السؤال الثالث (15 درجة): لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p . عرف الـ p- زمرة جزئية سيلوفية في الزمرة G ثم ادرس الزمرة التي مرتبتها 40.

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. ايمان الخوجة

2018 - 2 - 4

دورة الفصل الأول 4 - 2 - 2018

السؤال الأول

(1) خطأ لأن:

$$a*(b*c) = a*\left(\frac{b+c}{3}\right) = \frac{a+\frac{b+c}{3}}{3} = \frac{3a+b+c}{9}$$

$$(a*b)*c = \left(\frac{a+b}{3}\right)*c = \frac{\frac{a+b}{3}+c}{3} = \frac{a+b+3c}{9}$$

وبالتالي $a+b+3c \neq 3a+b+c$

(2) خطأ وذلك لأن:

mod4	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

من خلال الجدول المجاور نلاحظ أنه من أجل

$2 \times 2 = 4 \bmod 4 = 0 \notin \{1,2,3\}$

وبالتالي فإن العملية المعرفة ليست داخلية أي ليست مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بالتقاس 4 وبالتالي المجموعة ليست زمرة

(3) خطأ: إذا كانت G تبديلية فإن $Z(G)=G$

(4) بشكل عام لدينا: نقول عن العنصر a^n أنه مولد للزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات مرتبتها m إذا وفقط إذا كان العددين n و m أوليان فيما بينهما أي $Gcd(n,m)=1$ وبالتالي فإن:

الحل:

خطأ وذلك لأن: $gcd(7,91) = 7 \neq 1$

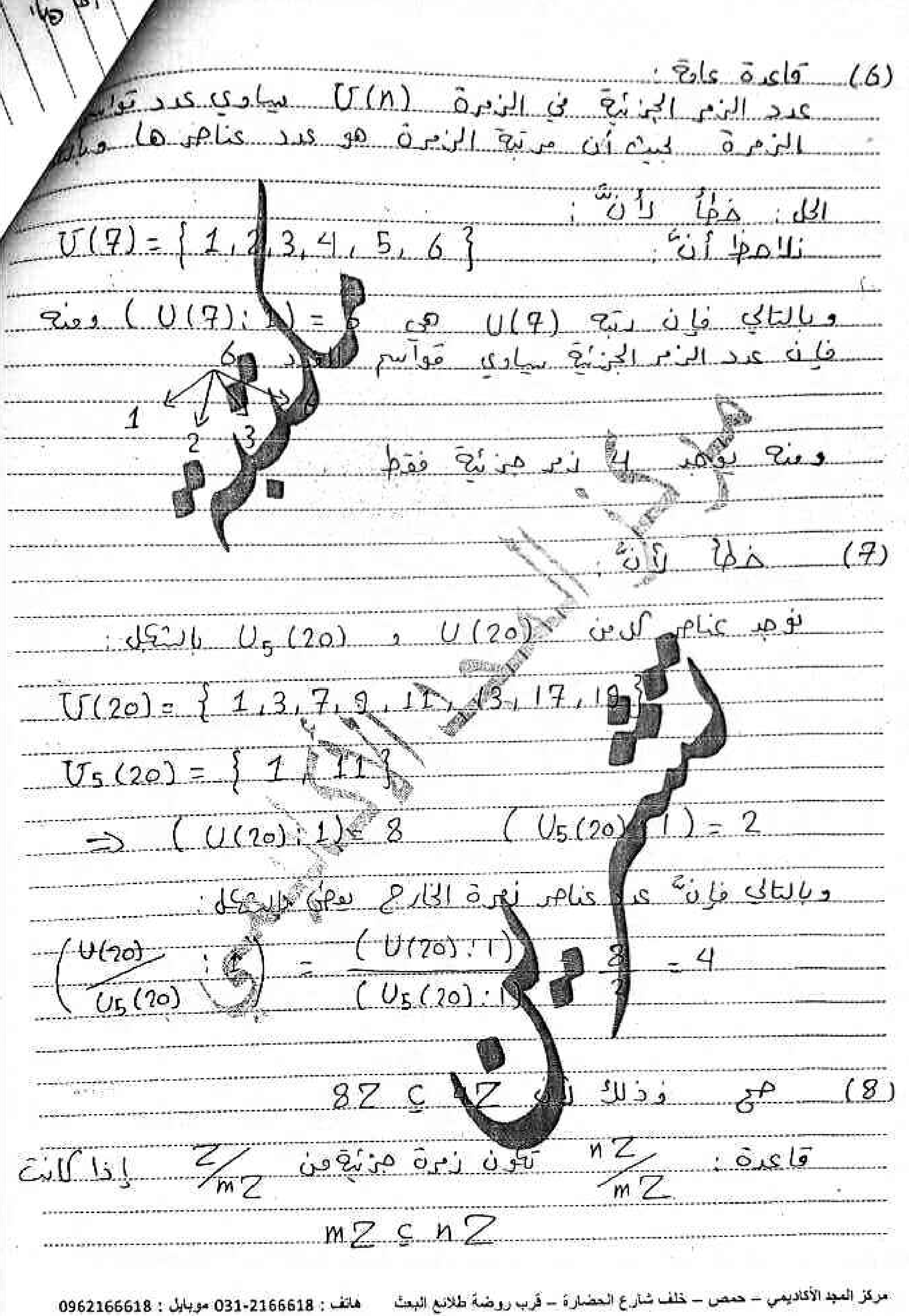
أي غير أوليين فيما بينهما

(5) بشكل عام لدينا: إذا كانت $(G,.)$ زمرة و $a \in G$ عنصر مرتبته n فإن مرتبة العنصر a^m تعطى بالشكل

$$O(a^m) = \frac{n}{gcd(n,m)}$$

الحل: خطأ لأن:

$$O(a^6) = \frac{14}{gcd(14,6)} = \frac{14}{2} = 7 \neq 84$$



(6) قاعدة عامة :

عدد الزمر الجزئية في الزمرة $U(n)$ يساوي عدد قواسم الزمرة بحيث أن مرتبة الزمرة هو عدد عناصرها ...

الحل: خطأ لأنه :

نلاحظ أنه : $U(7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وبالتالي فإن رتبة $U(7)$ هي $(U(7):1) = 6$ ومنه

فإن عدد الزمر الجزئية يساوي قواسم العدد 6

$6 \to 1, 2, 3, 6$

ومنه يوجد 4 زمر جزئية فقط

(7) خطأ لأنه :

نوجد عناصر كل من $U(20)$ و $U_5(20)$ بالشكل :

$U(20) = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

$U_5(20) = \{1, 11\}$

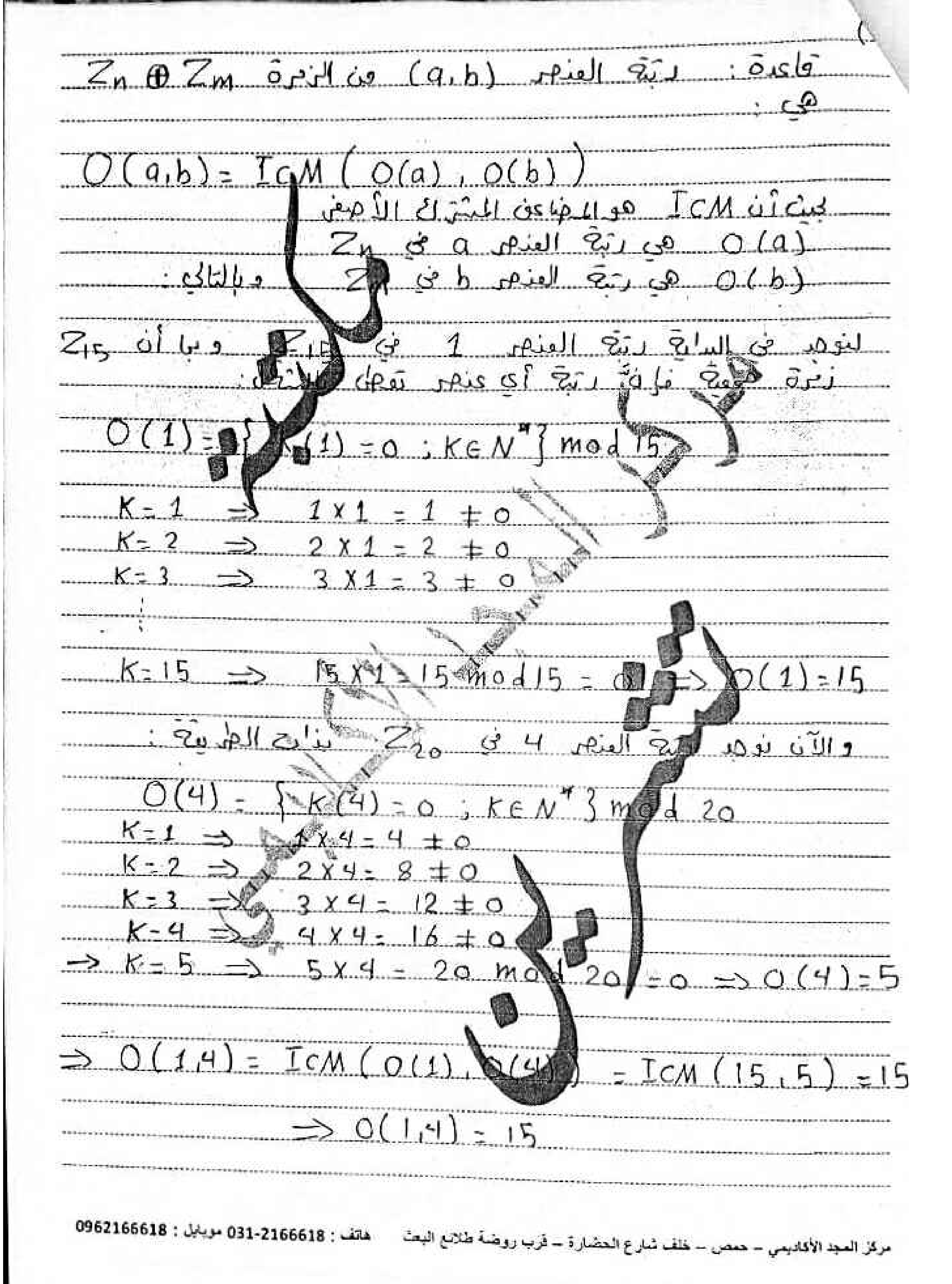
$\Rightarrow (U(20):1) = 8 \qquad (U_5(20):1) = 2$

وبالتالي فإن عدد عناصر زمرة الخارج يعطى بالشكل :

$$\left(\frac{U(20)}{U_5(20)} : 1\right) = \frac{(U(20):1)}{(U_5(20):1)} = \frac{8}{2} = 4$$

(8) صح وذلك لأن $8Z \subseteq 4Z$

قاعدة : nZ/mZ تكون زمرة جزئية من Z/mZ إذا كانت $mZ \subseteq nZ$



قاعدة: رتبة العنصر (a,b) من الزمرة $Z_n \oplus Z_m$ هي:

$$O(a,b) = lcm(O(a), O(b))$$

حيث أن lcm هو المضاعف المشترك الأصغر

$O(a)$ هي رتبة العنصر a في Z_n

$O(b)$ هي رتبة العنصر b في Z_m وبالتالي:

لنوجد في البداية رتبة العنصر 1 في Z_{15} وبما أن Z_{15} زمرة جمعية فإن رتبة أي عنصر تعطى بالشكل:

$$O(1) = \{k(1) = 0 \; ; k \in N^*\} \mod 15$$

$k=1 \Rightarrow 1 \times 1 = 1 \neq 0$

$k=2 \Rightarrow 2 \times 1 = 2 \neq 0$

$k=3 \Rightarrow 3 \times 1 = 3 \neq 0$

$\vdots$

$k=15 \Rightarrow 15 \times 1 = 15 \mod 15 = 0 \Rightarrow O(1) = 15$

والآن نوجد رتبة العنصر 4 في Z_{20} بنفس الطريقة:

$$O(4) = \{k(4) = 0 \; ; k \in N^*\} \mod 20$$

$k=1 \Rightarrow 1 \times 4 = 4 \neq 0$

$k=2 \Rightarrow 2 \times 4 = 8 \neq 0$

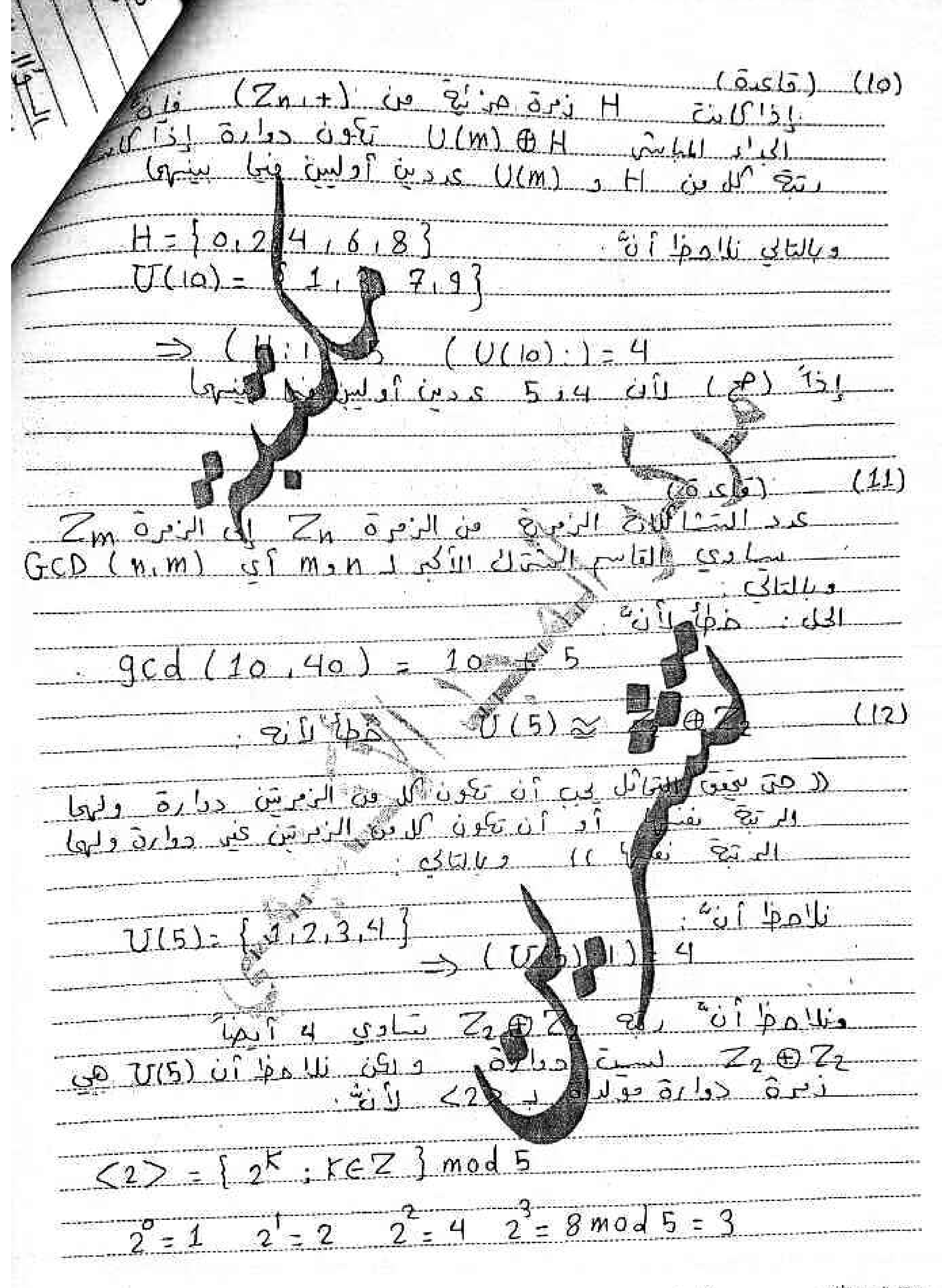
$k=3 \Rightarrow 3 \times 4 = 12 \neq 0$

$k=4 \Rightarrow 4 \times 4 = 16 \neq 0$

$\Rightarrow k=5 \Rightarrow 5 \times 4 = 20 \mod 20 = 0 \Rightarrow O(4) = 5$

$$\Rightarrow O(1,4) = lcm(O(1), O(4)) = lcm(15, 5) = 15$$

$$\Rightarrow O(1,4) = 15$$



(10) (قاعدة)

إذا كانت H زمرة جزئية من $(Z_n,+)$ فإن الجداء المباشر $U(m) \oplus H$ تكون دوارة إذا كانت رتبة كل من H و $U(m)$ عددين أوليين فيما بينهما

وبالتالي نلاحظ أنَّ:

$H = \{0,2,4,6,8\}$

$U(10) = \{1,3,7,9\}$

$\Rightarrow (H:1)=5 \quad (U(10):1)=4$

إذاً (صح) لأن 4 و 5 عددين أوليين فيما بينهما

(11) (قاعدة)

عدد التشاكلات الزمرية من الزمرة Z_n إلى الزمرة Z_m يساوي القاسم المشترك الأكبر لـ n و m أي $GCD(n,m)$

وبالتالي:

الحل: خطأ لأنه

$gcd(10,40) = 10 \neq 5$.

(12) $U(5) \cong Z_2 \oplus Z_2$ خطأ لأنه:

« حتى يتحقق التشاكل يجب أن تكون كل من الزمرتين دوارة ولهما الرتبة نفسها أو أن تكون كل من الزمرتين غير دوارة ولهما الرتبة نفسها » وبالتالي:

نلاحظ أنه:

$U(5) = \{1,2,3,4\}$

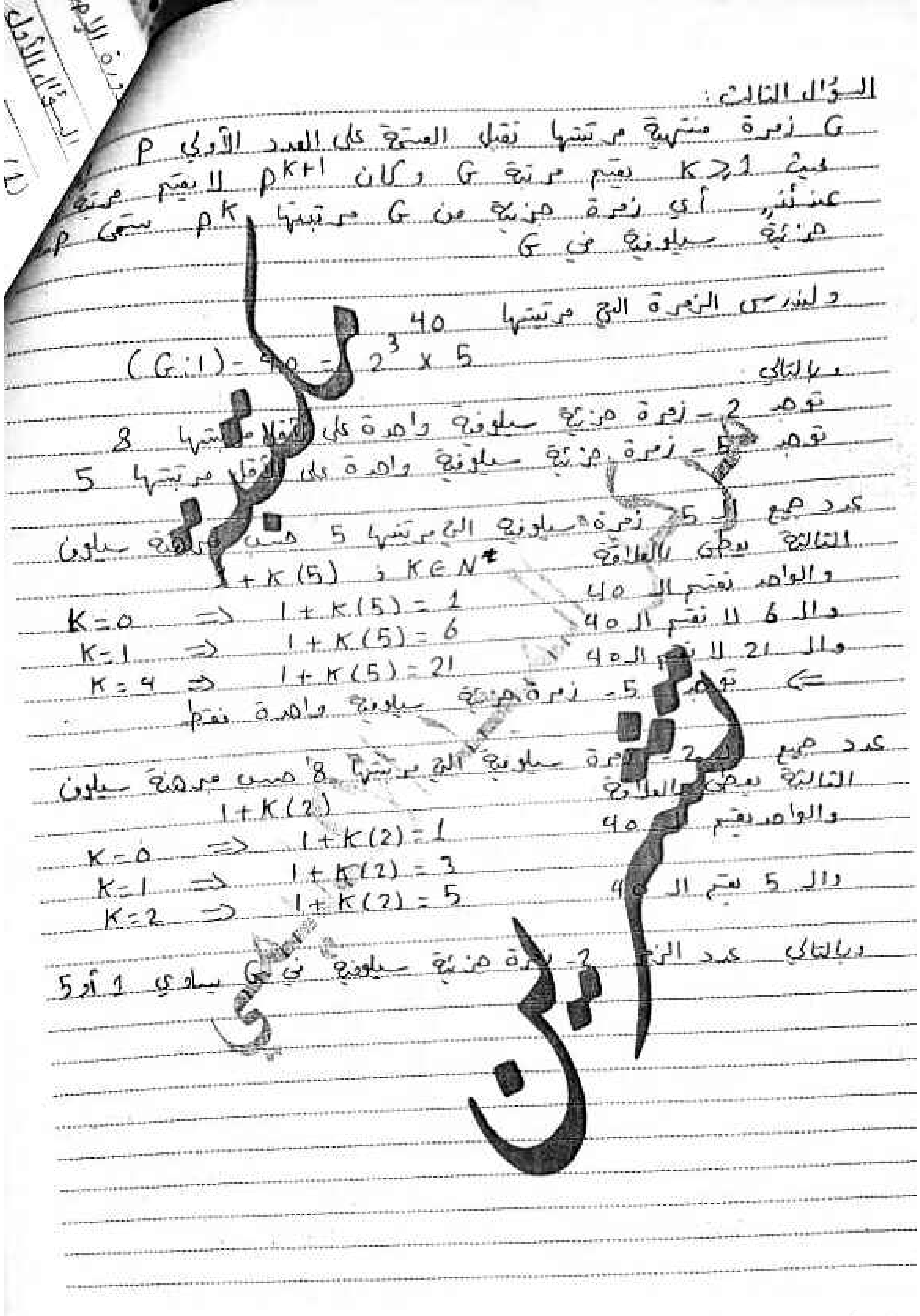
$\Rightarrow (U(5):1) = 4$

ونلاحظ أن رتبة $Z_2 \oplus Z_2$ تساوي 4 أيضاً

$Z_2 \oplus Z_2$ ليست دوارة ولكن نلاحظ أن $U(5)$ هي زمرة دوارة مولدة بـ $\langle 2 \rangle$ لأنه:

$\langle 2 \rangle = \{2^k : k \in Z\} \bmod 5$

$2^0 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \bmod 5 = 3$



السؤال الثالث :

G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الأولي p

حيث $K \geq 1$ يقسم مرتبة G وكان p^{K+1} لا يقسم مرتبة G

عندئذٍ أي زمرة جزئية من G مرتبتها p^K تسمى p زمرة جزئية سيلوفية في G

ولندرس الزمرة التي مرتبتها 40

$$(G:1) = 40 = 2^3 \times 5$$

وبالتالي

توجد 2- زمرة جزئية سيلوفية واحدة على الأقل مرتبتها 8

توجد 5- زمرة جزئية سيلوفية واحدة على الأقل مرتبتها 5

عدد جميع الـ 5- زمرة سيلوفية التي مرتبتها 5 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+K(5)$; $K \in N^*$

$K=0 \Rightarrow 1+K(5)=1$ والواحد يقسم الـ 40

$K=1 \Rightarrow 1+K(5)=6$ والـ 6 لا يقسم الـ 40

$K=4 \Rightarrow 1+K(5)=21$ والـ 21 لا يقسم الـ 40

⇐ توجد 5- زمرة جزئية سيلوفية واحدة فقط

عدد جميع الـ 2- زمرة سيلوفية التي مرتبتها 8 حسب مبرهنة سيلوف الثالثة يعطى بالعلاقة $1+K(2)$

$K=0 \Rightarrow 1+K(2)=1$ والواحد يقسم 40

$K=1 \Rightarrow 1+K(2)=3$

$K=2 \Rightarrow 1+K(2)=5$ والـ 5 يقسم الـ 40

وبالتالي عدد الـ 2- زمرة جزئية سيلوفية في G يساوي 1 أو 5

1) صح

السؤال الثاني:

1] لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية في G عندئذٍ:

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

أي أن مرتبة أي زمرة جزئية من G تقسم مرتبة الزمرة G

الإثبات:

لتكن $a_1H , a_2H , \dots , a_nH$ أسرة كل المجموعات المرافقة اليسارية لـ H في G مختلفة مثنى مثنى، المجموعات المرافقة اليسارية لـ G تشكل تجزئة لـ G وبالتالي:

$$G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_nH$$

وبالتالي:

$$\text{Card}\, G = \text{Card}\, a_1H + \text{Card}\, a_2H + \dots + \text{Card}\, a_nH$$

ولكن قدرة كل مجموعة مرافقة هي قدرة H نفسها وبالتالي:

$$\text{Card}\, a_iH = \text{Card}\, H \quad ; \quad 1 \le i \le n$$

$$\Rightarrow \text{Card}\, G = n\, \text{Card}\, H$$

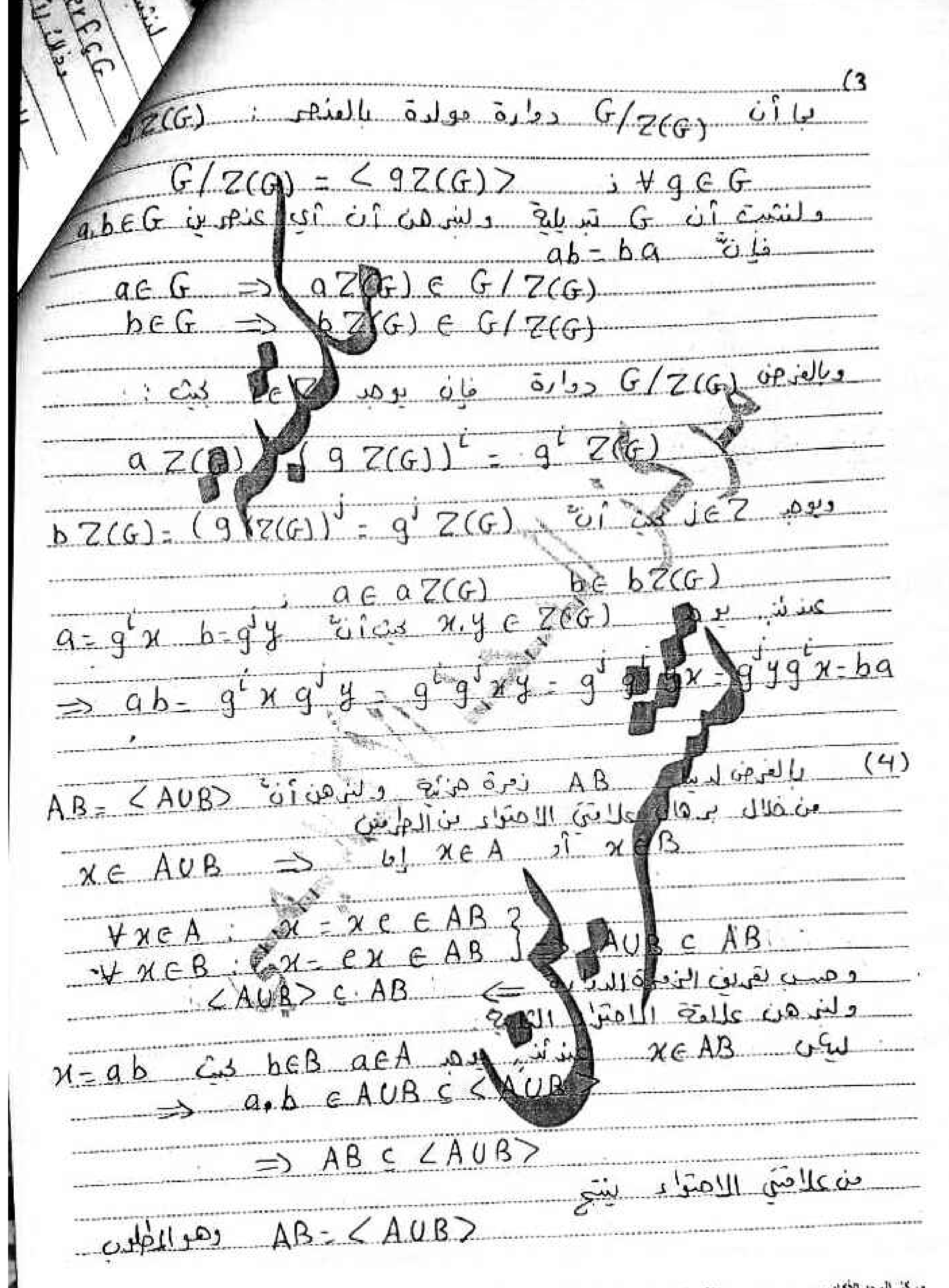
$$\Rightarrow \text{Card}\, G = (G:H)(H:1)$$

$$\Rightarrow (G:1) = (G:H)(H:1)$$

2] لنفرض أن رتبة ab تساوي n عندئذٍ $(ab)^n = e$ ومنه
$(ba)^{n-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} \Leftarrow a(ba)(ba) \dots (ba)b = e$

ومنه فإن $(ba)^n = e$ ولنفرض أن رتبة ba هي m وبما أن
$(ba)^n = e$ فإن m يقسم n وبما أن $(ba)^m = e$ فإن
$(ab)^m = e$ وكون n رتبة ab فإن n يقسم m ومنه

أصبح لدينا $n = m$ وهو المطلوب.



3)

بما أن $G/Z(G)$ دوارة مولدة بالعنصر $gZ(G)$:

$$G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle \;;\; \forall g \in G$$

ولنثبت أن G تبديلية ولنبرهن أن أي عنصرين $a,b \in G$ فإن $ab = ba$

$$a \in G \Rightarrow aZ(G) \in G/Z(G)$$
$$b \in G \Rightarrow bZ(G) \in G/Z(G)$$

وبالفرض $G/Z(G)$ دوارة فإن يوجد $i \in \mathbb{Z}$ بحيث :

$$aZ(G) = (gZ(G))^i = g^i Z(G)$$

ويوجد $j \in \mathbb{Z}$ بحيث أن $bZ(G) = (gZ(G))^j = g^j Z(G)$

$$a \in aZ(G) \quad , \quad b \in bZ(G)$$

عندئذ يوجد $x,y \in Z(G)$ بحيث أن $a = g^i x \quad b = g^j y$

$$\Rightarrow ab = g^i x g^j y = g^i g^j x y = g^j g^i y x = g^j y g^i x = ba$$

(4) بالفرض لدينا AB زمرة جزئية ولنبرهن أن $AB = \langle A \cup B \rangle$ من خلال برهان علاقتي الاحتواء بين الطرفين

$$x \in A \cup B \Rightarrow \text{إما } x \in A \text{ أو } x \in B$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in A : x = xe \in AB \\ \forall x \in B : x = ex \in AB \end{array}\right\} A \cup B \subseteq AB$$

وحسب تعريف الزمرة الجزئية المولدة $\Leftarrow \langle A \cup B \rangle \subseteq AB$

ولنبرهن علاقة الاحتواء العكسية

ليكن $x \in AB$ عندئذ يوجد $a \in A$, $b \in B$ بحيث $x = ab$

$$\Rightarrow a,b \in A \cup B \subseteq \langle A \cup B \rangle$$

$$\Rightarrow AB \subseteq \langle A \cup B \rangle$$

من علاقتي الاحتواء ينتج

$AB = \langle A \cup B \rangle$ وهو المطلوب

لنثبت أن $Ker f$ زمرة جزئية ناظمية في G

من جهة ثانية ليست خالية لأن الحيادي ينتمي إليها $Ker f \subseteq G$

وذلك لأن $f(e)=e' \Rightarrow e' \in Ker f \Rightarrow Ker f \neq \emptyset$

لإثبات أنها زمرة جزئية لنبرهن تحقق الشرط:

$$\forall x,y \in Ker f \overset{?}{\Rightarrow} xy^{-1} \in Ker f$$

أي لنثبت أنّ $f(xy^{-1})=e'$ حيث $f(x)=e'$ $f(y)=e'$

وذلك لكون $x,y \in Ker f$

$$\Rightarrow f(xy^{-1}) = f(x) f(y^{-1}) = f(x)[f(y)]^{-1} = e'[e']^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in Ker f \Rightarrow Ker f$$ زمرة جزئية

ولنثبت أنها ناظمية يجب أن نبرهن تحقق الشرط:

$$\forall g \in G \quad : \quad g\, Ker f\, g^{-1} \subseteq Ker f$$

ليكن $y \in g\, Ker f\, g^{-1}$ هذا يعني أنه يوجد $x \in Ker f$

بحيث $y = g x g^{-1}$ ولإثبات y أنه بالنواة

يجب أن نثبت أن صورته هي الحيادي

$$\Rightarrow f(y) = f(gxg^{-1}) = f(g) f(x) f(g^{-1})$$

ولكن x من النواة $\Leftarrow f(x)=e'$

$$\Rightarrow \; = f(g)\, e'\, [f(g)]^{-1} = f(g)\, e' e' = e'$$

$$\Rightarrow y \in Ker f \Rightarrow Ker f$$ ناظمية في G

6] في البداية نلاحظ أن $f: Q^* \to Q^*$ معرف بالشكل

$$f(x) = |x| \quad ; \quad \forall x \in Q^*$$

النواة $Ker f$ معرفة بالشكل

$$Ker f = \{x \in Q^* \,,\, f(x)=|x|=1\} \Rightarrow Ker f = \{-1, 1\}$$

وهو واضح أنه يشكل هومومورفيزم لتحقق شرطي التشاكل بالنسبة لـ f